

2020年天津和平区高三一模数学试卷

一、选择题

爱智 (本大题共9小题, 每小题5分, 共45分)

1. 设全集 $I = \{x | -3 < x < 3, x \in \mathbf{Z}\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{-2, 0, 2\}$, 则 $A \cup (\complement_I B) = ()$.

A. $\{-1, 1, 2\}$ B. $\{1\}$ C. $\{2\}$ D. $\{0, 1, 2\}$

2. " $\alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ " 是 " $\tan(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ " 的 ().

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

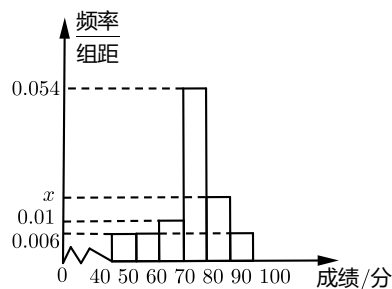
3. 已知 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数, $g(x) = [x]$ 为取整函数, x_0 是函数 $f(x) = \ln x + x - 4$ 的零点, 则 $g(x_0) = ()$.

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

4. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线与抛物线 $C_2: y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线分别交于 A, B 两点. 若双曲线 C_1 的离心率为 2, $\triangle AOB$ 的面积为 $\sqrt{3}$, O 为坐标原点, 则抛物线 C_2 的焦点坐标为 ().

A. $(\sqrt{2}, 0)$ B. $(1, 0)$ C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ D. $(\frac{1}{2}, 0)$

5. 某班 50 名学生期中考试数学成绩的频率分布直方图如图所示, 其中成绩分组区间是: $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$, $[70, 80)$, $[80, 90)$, $[90, 100]$. 从样本成绩不低于 80 分的学生中随机选取 2 人, 记这 2 人成绩在 90 分以上 (含 90 分) 的人数为 ξ , 则 ξ 的数学期望为 ().



A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

6. 已知函数 $f(x) = \sin 2x - 2\sin^2 x + 1$, 给出下列四个结论, 其中正确的结论是 ().

A. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π
B. 函数 $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}]$ 上是减函数
C. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = \frac{\pi}{16}$ 对称
D. 函数 $f(x)$ 的图象可由函数 $y = \sqrt{2} \sin 2x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位得到

7. 函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 对任意两个正数 $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$, 都有 $\frac{f(x_1)}{x_1} > \frac{f(x_2)}{x_2}$, 记 $a = 25f(0.2^2), b = f(1), c = -\log_3 3f(\log_{\frac{1}{3}} 5)$, 则 a, b, c 大小关系为 ().
- A. $c > b > a$ B. $b > c > a$ C. $a > b > c$ D. $a > c > b$

8. 国际高峰论坛, 组委会要从6个国内媒体团和3个国外媒体团中选出3个媒体团进行提问, 要求这三个媒体团中既有国内媒体团又有国外媒体团, 且国内媒体团不能连续提问, 则不同的提问方式的种数为 ().
- A. 378 B. 306 C. 268 D. 198

9. 已知圆 O 的半径为2, P, Q 是圆 O 上任意两点, 且 $\angle POQ = 60^\circ$, AB 是圆 O 的一条直径, 若点 C 满足 $\overrightarrow{OC} = (\lambda - 1)\overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{OQ} (\lambda \in \mathbf{R})$, 则 $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ 的最小值为 ().
- A. -1 B. -2 C. -3 D. -4

二、填空题

(本大题共6小题, 每小题5分, 共30分)

10. 已知 a 为实数, i 为虚数单位, 若复数 $z = (a^2 - 1) + (a + 1)i$ 为纯虚数, 则 $\left| \frac{a + i^{2020}}{1 + i} \right| = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. 若 $\left(x + \frac{a}{\sqrt[3]{x}} \right)^8$ 的展开式中 x^4 的系数为 -488, 则实数 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.
12. 已知一个体积为8的正方体内接于半球体, 即正方体的上底面的四个顶点在球面上, 下底面的四个顶点在半球体的底面圆内, 则该半球体的体积为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
13. 函数 $f(x) = x \ln x + a$ 的图象在 $x = 1$ 处的切线被圆 $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ 截得弦长为2, 则实数 a 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
14. 若 $x > 0, y > 0$, 且 $\log_2 3^x + \log_2 9^y = \log_4 81$, 则此时 $x + 2y = \underline{\hspace{2cm}}$, $\frac{2}{x} + \frac{x + 3y}{3y}$ 的最小值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 1 - |x + 1|, & x \in [-2, 0] \\ 2f(x - 2), & x \in (0, +\infty) \end{cases}$, 则 $3^{\log_{f(3)} 256} = \underline{\hspace{2cm}}$; 若方程 $f(x) = x + a$ 在区间 $[-2, 4]$ 有三个不等实根, 则实数 $\frac{1}{a}$ 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

(本大题共5小题，共75分)

16. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ， $\sqrt{2}\cos C(a\cos B + b\cos A) + c = 0$.

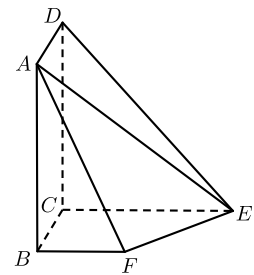
(1) 求角 C 的大小.

(2) 若 $a = \sqrt{2}$ ， $b = 2$ 求：

1 边长 c .

2 $\sin(2B - C)$ 的值.

17. 如图所示，平面 $ABCD \perp$ 平面 $BCEF$ ，且四边形 $ABCD$ 为矩形，四边形 $BCEF$ 为直角梯形， $BF \parallel CE$ ， $BC \perp CE$ ， $DC = CE = 4$ ， $BC = BF = 2$.



(1) 求证： $AF \parallel$ 平面 CDE .

(2) 求平面 ADE 与平面 $BCEF$ 所成锐二面角的大小.

(3) 求直线 EF 与平面 ADE 所成角的余弦值.

18. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 , 以原点 O 为圆心, 椭圆 C 的短半轴长为半径的圆与直线 $x - y + 2 = 0$ 相切.

(1) 求椭圆 C 的标准方程.

(2) 设 Q 为椭圆 C 上不在 x 轴上的一个动点, 过点 F_2 作 OQ 的平行线交椭圆 C 于 M 、 N 两个不同的点, 记 $\triangle QF_2M$ 的面积为 S_1 , $\triangle OF_2N$ 的面积为 S_2 , 令 $S = S_1 + S_2$, 求 S 的最大值.

19. 数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 公比大于0, 前 n 项和 $S_n (n \in \mathbf{N}^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 已知 $a_1 = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{a_3} = \frac{1}{a_2} + 4$, $a_3 = \frac{1}{b_4 + b_6}$, $a_4 = \frac{1}{b_5 + 2b_7}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式 a_n , b_n .

(2) 设 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 $T_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

1 求 T_n .

2 若 $c_n = \frac{(T_{n+1} - b_{n+1})b_{n+3}}{b_{n+1}b_{n+2}}$, 记 $R_n = \sum_{n=1}^n C_n$, 求 R_n 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x) = \frac{ax+b}{x}e^x$, $a, b \in \mathbf{R}$, 且 $a > 0$.

(1) 若函数 $f(x)$ 在 $x = -1$ 处取得极值 $\frac{1}{e}$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

(2) 在(1)的条件下, 求函数 $f(x)$ 的单调区间.

(3) 设 $g(x) = a(x-1)e^x - f(x)$, $g'(x)$ 为 $g(x)$ 的导函数. 若存在 $x_0 \in (1, +\infty)$, 使 $g(x_0) + g'(x_0) = 0$ 成立, 求 $\frac{b}{a}$ 的取值范围.